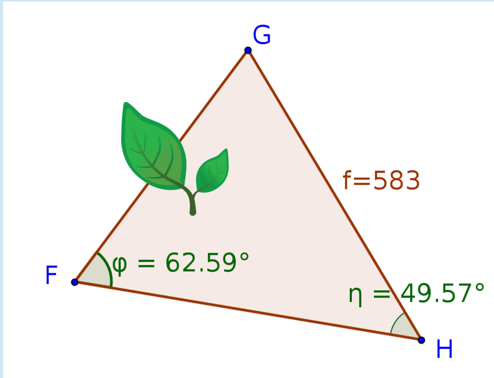
Modul:
Trigonometrie 1

Herleitung Sinussatz

5

Diese Aufgabe ist im Feldmesspraktikum 2016 entstanden:



Aufgabe:

Die Strecke $\overline{\mathbf{FG}}$ konnte nicht vermessen werden, weil dichtes Strauchwerk den Weg versperrte. Es war zwar niedrig genug, um den Punkt **G** von **F** aus sehen zu können, dennoch fast undurchdringlich.

Man kann sich hier mit einem kleinen Umweg und einer Rechenaufgabe helfen: Man setzt einen Hilfspunkt **H**, der von **F** und **G** aus leicht zugänglich ist und misst z.B. die in der Zeichnung angegebenen Größen (Strecke **f** und - weil einfacher zu rechnen - die Winkel **η** und **φ**).

Problematik:

In den bisherigen Aufgaben hatten wir es immer mit rechtwinkligen Dreiecken zu tun. In diesem Dreieck ist <u>kein rechter Winkel</u> → **Folge**: Wir können die bekannten Formeln für **sin**, **cos** und **tan** <u>nicht</u> anwenden !

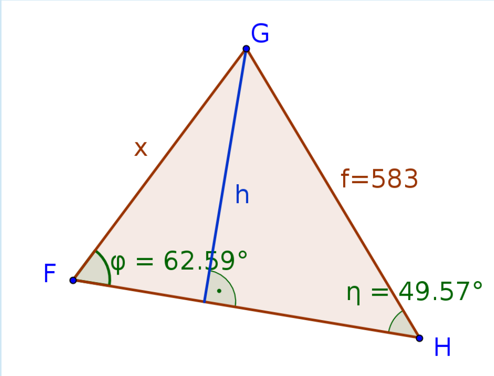
Ziel:

Finde rechtwinklige Dreiecke !

STOP: Versuche selbst rechtwinklige Dreiecke zu finden, bevor du weiter machst !

Herleitung Sinussatz

Idee:
Wir zeichnen die Höhe (blaue Linie) ein.



Strategie:
Das große Dreieck zerfällt in 2 rechtwinklige Teile. Wir benötigen demnach 2 Rechenschritte: Als Zwischenergebnis berechnen wir die gemeinsame Seite **h**.

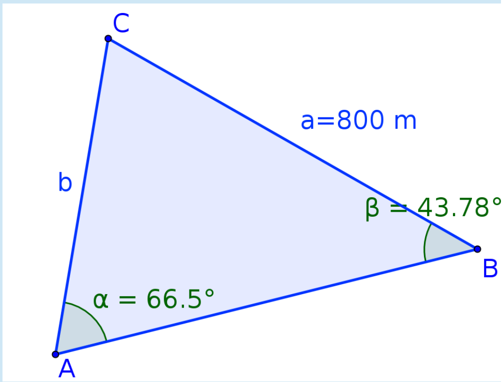
- **Schritt 1:** Im rechten Dreieck **ΔBHG** kann man **h** berechnen:

$$
\begin{aligned}
\sin(\eta) &= \frac{G}{H} \\
\sin(49{,}57°) &= \frac{h}{573} && |\leftrightarrow \\
\frac{h}{573} &= \sin(49{,}57°) && |\cdot 573 \\
h &= \sin(49{,}57°)\cdot 573 \approx \underline{436{,}2}
\end{aligned}
$$

- **Schritt 2:** Nun kann man im linken Dreieck **ΔFBG** die gesuchte Seite **x** ermitteln:

$$
\begin{aligned}
\sin(\varphi) &= \frac{G}{H} \\
\sin(62{,}59°) &= \frac{436{,}2}{x} && |\cdot x \\
x\cdot\sin(62{,}59°) &= 436{,}2 && |:\sin(62{,}59°) \\
x &= \frac{436{,}2}{\sin(62{,}59°)} \approx \underline{\mathbf{491{,}3}}
\end{aligned}
$$

Selbst ausprobieren (2. Aufgabe):
Versuche nun selbständig diese Aufgabe zu lösen ! Gesucht ist die Seite **b**.



STOP: Versuche selbst zu rechnen, bevor du weiter machst !

Modul:
Trigonometrie 1

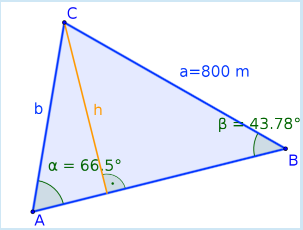
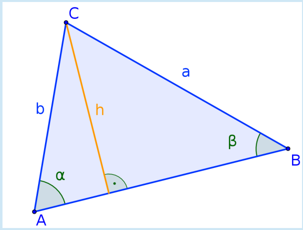
Herleitung Sinussatz

5

Herleitung der Formel:

In der linken Spalte findet du die Musterlösung für die 2. Aufgabe

Eine Formel erhält man, wenn man statt mit Zahlen nur mit Buchstaben rechnet (rechte Spalte). Versuche auch diese Rechnung nachzuvollziehen !

Musterlösung der 2. Aufgabe	Herleitung der Formel
 	
1. Schritt: h berechnen $\sin(\beta) = \frac{G}{H}$ $\sin(43{,}78°) = \frac{h}{800} \quad \vert\leftrightarrow$ $\frac{h}{800} = \sin(43{,}78°) \quad \vert\cdot 800$ $h = \sin(43{,}78°)\cdot 800 \approx \underline{553{,}5}$	**1. Schritt: h** berechnen $\sin(\beta) = \frac{G}{H}$ $\sin(\beta) = \frac{h}{a} \quad \vert\leftrightarrow$ $\frac{h}{a} = \sin(\beta) \quad \vert\cdot a$ $h = \underline{\sin(\beta)\cdot a}$
2. Schritt: b berechnen $\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$ $\sin(66{,}5°) = \frac{553{,}5}{b} \quad \vert\cdot b$ $b\cdot\sin(66{,}5°) = 553{,}5 \quad \vert:\sin(66{,}5°)$ $b = \frac{553{,}5}{\sin(66{,}5°)} \approx \underline{\mathbf{603{,}6}}$	**2. Schritt: b** berechnen $\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$ $\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \vert\cdot b$ $b\cdot\sin(\alpha) = h \quad \vert:\sin(\alpha)$ $b = \frac{h}{\sin(\alpha)}$
	aus 2 mach 1 eigentlich haben wir jetzt 2 Formeln (eine zum Berechnen von **h** und eine für **b**). Diese fassen wir noch zusammen, indem wir **h** durch $\mathbf{\sin(\beta)\cdot a}$ ersetzen: $b = \frac{h}{\sin(\alpha)} \quad => \quad b = \frac{\sin(\beta)\cdot a}{\sin(\alpha)}$ Jetzt noch ein wenig „Kosmetik“, dann kann man das Ergebnis leichter merken ! $b = \frac{\sin(\beta)\cdot a}{\sin(\alpha)} \quad \vert:\sin(\beta)$ $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$

Ergebnis:

Dieselbe Rechnung ließe sich auch für **c** und **sin(γ)** machen, so dass wir als Gesamtergebnis folgende Formel erhalten:

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Wie man mit dieser Formel rechnet erfährst du hier ☛