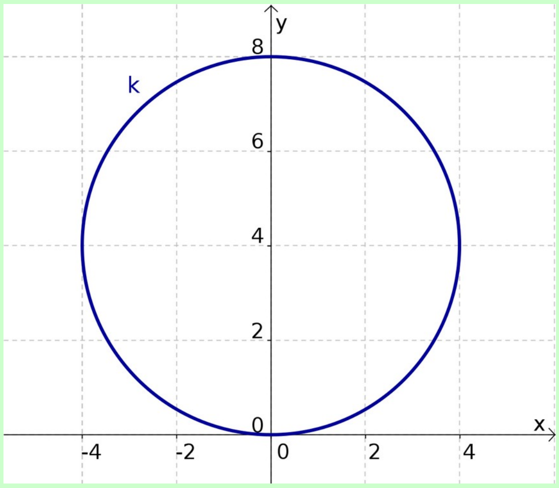
Lösungen: Die Umkehrfunktion

M

5.



a) Ermittle die Funktionsgleichung aus der Zeichnung.

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2} + 4$$

b) Berechne daraus die Gleichung der Umkehrfunktion.

$$y = \pm\sqrt{16 - (x-4)^2}$$

c) Berechne Definitions- und Wertebereich.

$D = \{\, x \mid -4 \leq x \leq 4 \,\}$, $W = \{\, x \mid 0 \leq x \leq 8 \,\}$

d) * Berechne die Schnittpunkte von Funktion und Umkehrfunktion.

$$\begin{array}{rcll}
\pm\sqrt{16-x^2}+4 & = & \pm\sqrt{16-(x-4)^2} & |^2 \\
\left(\pm\sqrt{16-x^2}+4\right)^2 & = & 16-(x-4)^2 & \\
(16-x^2)\pm 2\cdot 4\cdot\sqrt{16-x^2}+16 & = & 16-x^2+8x-16 & |-x^2 \\
\pm 8\sqrt{16-x^2}+32 & = & +8x & |:8 \\
\pm\sqrt{16-x^2}+4 & = & x & |-4 \\
\pm\sqrt{16-x^2} & = & x-4 & |^2 \\
16-x^2 & = & (x-4)^2 & \\
16-x^2 & = & x^2-8x+16 & |-16+x^2 \\
0 & = & 2x^2-8x & \\
0 & = & 2x(x-4) & NPR \\
x_1 & = & 0 & \\
x_2 & = & 4 &
\end{array}$$

Da Funktion und Umkehrfunktion an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt sind, müssen die Schnittpunkte auf derselben liegen, also gilt: $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2$:

$S_1(0|0)$, $S_2(4|4)$