

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ mit ihren Ableitungen $f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$ und $f'''(x) = (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$. e ist dabei die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828 18284 59045 23536 028$.

- a) Zeige, dass die Funktion bei $x=0$ eine Nullstelle hat und den Punkt $(1 | e)$ enthält!

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$f(1) = 1^2 \cdot e^1 = 1 \cdot e = e$$

- b) Berechne Art und Lage der Extrema (Näherungswerte auf 2 Nachkommastellen)!

x-Werte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x^2 + 2x) \cdot e^x &= 0 \quad e^x \neq 0 \\ x^2 + 2x &= 0 \\ x(x+2) &= 0 \quad \text{NPR} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

y-Werte dazu:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2 \\ f(1) &= +2 \end{aligned}$$

Art des Extremums:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2 > 0 \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2) &= -0,27 < 0 \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: **HP(-2 | 0,54), TP(0 | 0)**

- c) Berechne die Wendepunkte (Näherungswerte auf 2 Nachkommastellen)!

x-Werte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x &= 0 \quad e^x \neq 0 \\ x^2 + 4x + 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ x_1 &= -2 - \sqrt{2} \approx -3,41 \\ x_2 &= -2 + \sqrt{2} \approx -0,58 \end{aligned}$$

y-Werte dazu:

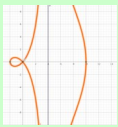
$$\begin{aligned} f(-2 - \sqrt{2}) &= 0,38 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= 0,19 \end{aligned}$$

Test WP:

$$\begin{aligned} f'''(-2 - \sqrt{2}) &= -0,09 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \\ f'''(-2 + \sqrt{2}) &= 1,57 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: **WP₁(-3,41 | 0,38), WP₂(-0,58 | 0,19)**

- d) Zeichne die Funktion mit Geogebra und markiere die berechneten Punkte



LÖSUNGEN: EXTREMA UND WENDEPUNKTE - AUFGABE 4

