Analytische Geometrie 2

Lösungen: Extrema und Wendepunkte - Aufgabe 4

5

4. Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2\cdot e^x$ mit ihren Ableitungen $f'(x)=(x^2+2x)\cdot e^x$, $f''(x)=(x^2+4x+2)\cdot e^x$ und $f'''(x)=(x^2+6x+6)\cdot e^x$. **e** ist dabei die Eulersche Zahl $e\approx 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028$.

a) Zeige, dass die Funktion bei x=0 eine Nullstelle hat und den Punkt (1| e) enthält !

$$f(0)=0^2\cdot e^0=0\cdot 1=0$$

$$f(1)=1^2\cdot e^1=1\cdot e=e$$

b) Berechne Art und Lage der Extrema (Näherungswerte auf 2 Nachkommastellen) !

x-Werte:

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & 0 & \\ (x^2+2x)\cdot e^x & = & 0 & e^x\neq 0 \\ x^2+2x & = & 0 & \\ x(x+2) & = & 0 & \text{NPR} \\ x_1 & = & \mathbf{0} & \\ x_2 & = & \mathbf{-2} & \end{array}$$

y-Werte dazu:

$$\begin{array}{rcl} f(-1) & = & -2 \\ f(1) & = & +2 \end{array}$$

Art des Extremums:

$$\begin{array}{rcrl} f''(0) & = & 2>0 & \text{=> TP} \\ f''(-2) & = & -0{,}27<0 & \text{=> HP} \end{array}$$

Zusammenfassung: **HP(-2 | 0,54), TP(0 | 0)**

c) Berechne die Wendepunkte (Näherungswerte auf 2 Nachkommastellen) !

x-Werte:

$$\begin{array}{rcll} f''(x) & = & 0 & \\ (x^2+4x+2)\cdot e^x & = & 0 & e^x\neq 0 \\ x^2+4x+2 & = & 0 & \\ x_{1,2} & = & \dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\,cdoot\,2}}{2\cdot 1} & \\ x_1 & = & \mathbf{-2-\sqrt{2}}\approx -3{,}41 & \\ x_2 & = & \mathbf{-2+\sqrt{2}}\approx -0{,}58 & \end{array}$$

y-Werte dazu:

$$\begin{array}{rcl} f(-2-\sqrt{2}) & = & 0{,}38 \\ f(-2+\sqrt{2}) & = & 0{,}19 \end{array}$$

Test WP:

$$\begin{array}{rcrl} f'''(-2-\sqrt{2}) & = & -0{,}09\neq 0 & \text{=> WP} \\ f'''(-2+\sqrt{2}) & = & 1{,}57\neq 0 & \text{=> WP} \end{array}$$

Zusammenfassung: **WP_1(-3,41 | 0,38), WP_2(-0,58 | 0,19)**

d) Zeichne die Funktion mit Geogebra und markiere die berechneten Punkte

Lösungen: Extrema und Wendepunkte – Aufgabe 4