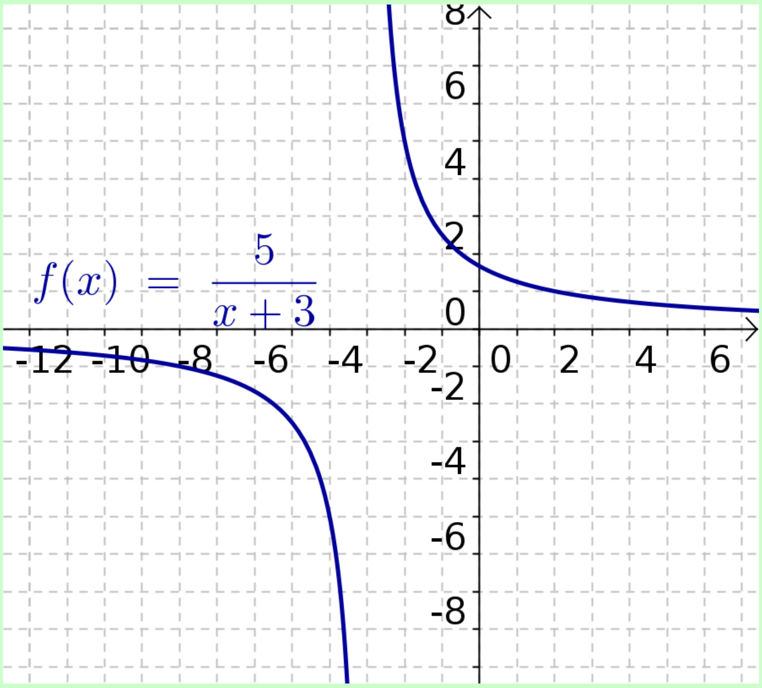
Lösungen: Definitionsbereich

2



1.

a) Für welchen x-Wert gibt es keinen y-Wert ?

Aus der Zeichnung: x=-3

b) Bestimme nun rechnerisch (aus der Formel) die (maximale) Definitionsmenge D_{max}!

Ansatz: Nenner = 0

$$\begin{array}{rcll} x+3 & = & 0 & |-3 \\ x & = & \mathbf{-3} & \end{array}$$

D_{max} = R \ {-3}

c) Welcher y-Wert kommt nicht vor ?

Aus der Zeichnung: y=0

d) Zeige, dass folgende Punkte auf f liegen: P(2|1), Q(-4|-5) !

$$f(2)=\frac{5}{2+3}=1$$ => P liegt auf f

$$f(-4)=\frac{5}{-4+3}=-5$$ => Q liegt auf f

e) R(-2|?) liegt auf dem Graphen. Berechne seinen y-Wert !

$$f(-2)=\frac{5}{-2+3}=5$$

f) Wann haben x und y den gleichen Wert ?

$$\begin{array}{rcll} y & = & x & \\ \frac{5}{x+3} & = & x & |\cdot(x+3) \\ 5 & = & x(x+3) & \\ 5 & = & x^2+3x & |-5 \\ 0 & = & x^2+3x-5 & \\ x_{1,2} & = & \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1} & \\ x_1 & = & -\frac{1}{2}(-3+\sqrt{29})\approx\mathbf{1{,}19} & \\ x_2 & = & -\frac{1}{2}(-3-\sqrt{29})\approx\mathbf{-4{,}19} & \end{array}$$

Lösungen: Definitionsbereich

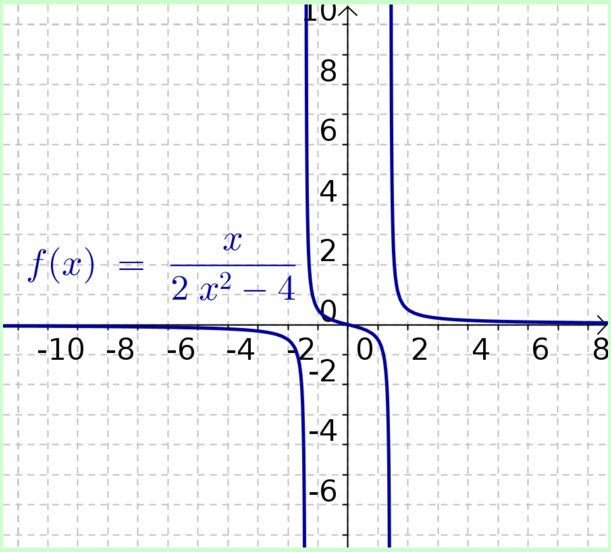
2.

a) Berechne D_{max} !

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{ -\sqrt{2} ; \sqrt{2} \}$

b) Überprüfe dein Ergebnis anhand der Zeichnung !

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ **kann stimmen !**



c) Gibt es einen y-Wert, der nicht vorkommt ? Begründe deine Ansicht !

Der mittlere Ast nimmt alle möglichen y-Werte an. Also: NEIN

d) Zeige rechnerisch, dass der Ursprung auf der Kurve liegt !

$f(0) = \frac{0}{2 \cdot 0^2 - 4} = \mathbf{0}$ **=> O liegt auf f**

e) Welchen y-Werte hat die Kurve bei $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -3$

$y_1 = f(1{,}5) = \frac{1{,}5}{2 \cdot 1{,}5^2 - 4} = \mathbf{3}$; $y_2 = f(-3) = \frac{-3}{2 \cdot (-3)^2 - 4} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}$

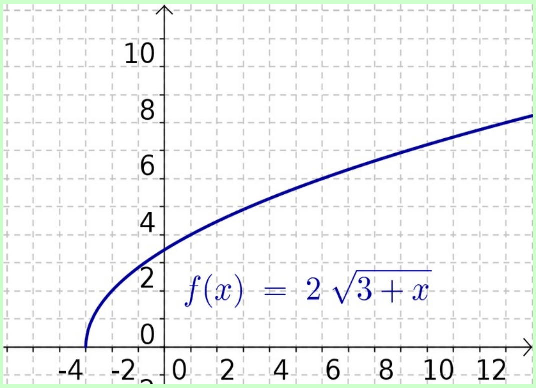
f) * Wann haben x und y den gleichen Wert ?

$$
\begin{array}{ccll}
y & = & x & \\
\frac{x}{2x^2 - 4} & = & x & | \cdot (2x^2 - 4) \\
x & = & x(2x^2 - 4) & \\
x & = & 2x^3 - 4x & | - x \\
0 & = & 2x^3 - 5x & \\
0 & = & x(2x^2 - 5) & \quad NPR \\
x_1 & = & \mathbf{0} & \\
0 & = & 2x^2 - 5 & | + 5 \\
5 & = & 2x^2 & \\
2{,}5 & = & x^2 & | \sqrt{\ } \\
x_2 & = & -\sqrt{2{,}5} \approx \mathbf{-1{,}58} & \\
x_3 & = & +\sqrt{2{,}5} \approx \mathbf{1{,}58} &
\end{array}
$$

Lösungen: Definitionsbereich

3. Berechne den maximalen Definitionsbereich von $f(x)=\frac{4}{x^2-9}$!

$$D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$$



4.

a) Bereche D_{max} !

$$D_{max}=\{x \mid x\geq -3\}$$

b) Überprüfe dein Ergebnis anhand der Zeichnung !

OK

c) Berechne die Achsenabschnitte !

y-Abschnitt: x=0=> $f(0)=2\cdot\sqrt{3+0}=2\sqrt{3}\approx\mathbf{3{,}46}$

Nullstellen: y=0 =>

d) Berechne die Schnittpunkte der Kurve mit der 1. Winkelhalbierenden !

$$\begin{array}{rcll}
y & = & x & \\
2\sqrt{3+x} & = & x & |:2 \\
\sqrt{3+x} & = & \frac{x}{2} & |\,^2 \\
3+x & = & \frac{x^2}{4} & |\cdot 4 \\
12+4x & = & x^2 & |-4x-12 \\
0 & = & x^2-4x-12 & \\
x_{1,2} & = & \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 8}{2} & \\
x_1 & = & \mathbf{6} & \\
x_2 & = & \mathbf{-2} &
\end{array}$$

Durch das Quadrieren in Zeile 3 können zusätzliche, falsche Lösungen auftreten. Deshalb muss die Probe gemacht werden ![1]

Probe 1: $\begin{array}{c} \text{linke Seite}: 2\cdot\sqrt{3+6}=6 \\ \text{rechte Seite}: 6 \end{array}$ **OK**

Probe 2: $\begin{array}{c} \text{linke Seite}: 2\cdot\sqrt{3-2}=2 \\ \text{rechte Seite}: -2 \end{array}$ **diese Zahl ist falsch !**

Am Punkt P(6 | 6) schneidet die Funktion die 1. Winkelhalbierende !

1 Das gilt für alle Wurzelgleichungen !!!!

Lösungen: Definitionsbereich

5.

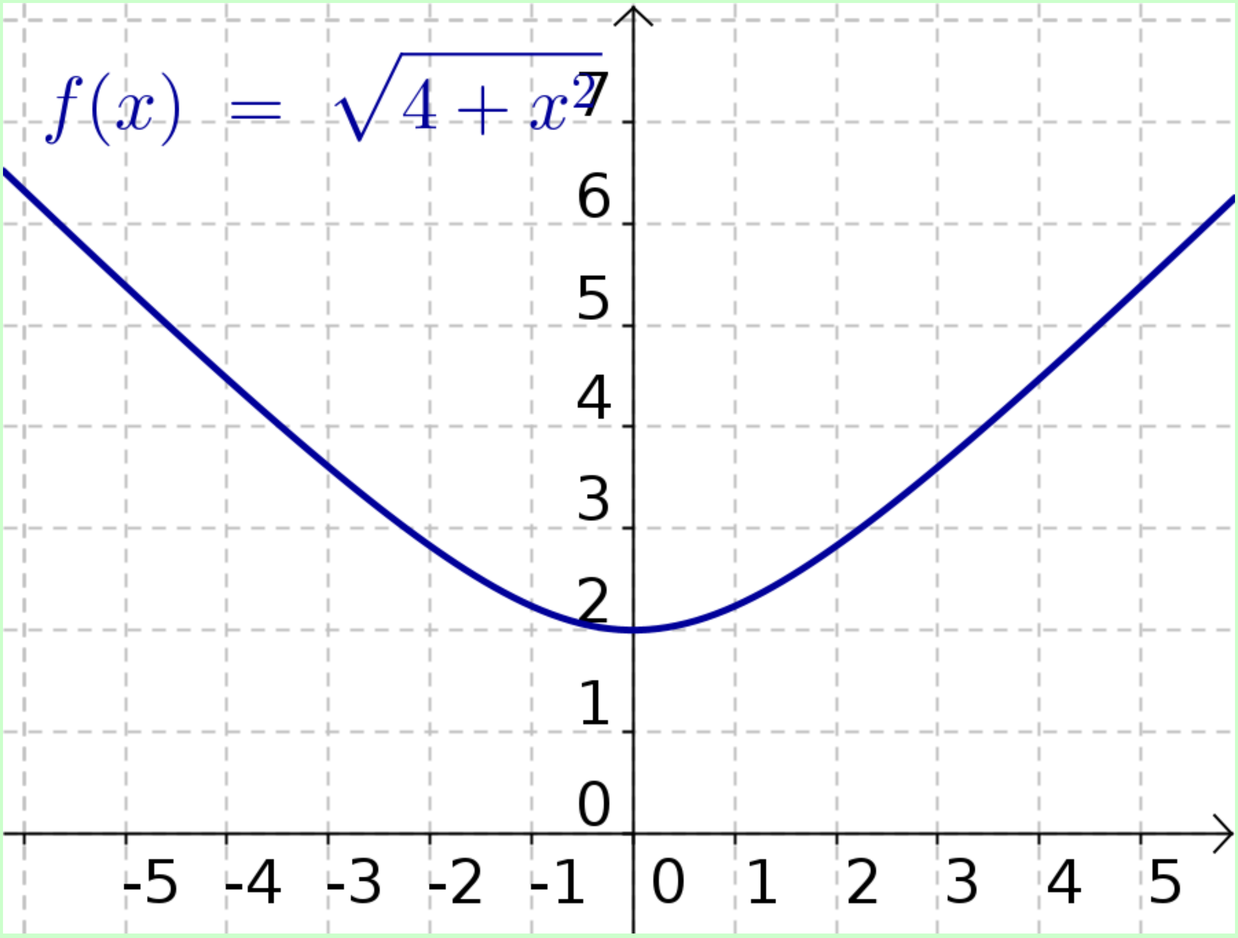
a) Bestimme rechnerisch den Definitionsbereich von $f(x)=\sqrt{(4+x^2)}$

$D_{max}=\mathbb{R}$

b)Zeige, dass y=2 der kleinste y-Wert ist, den die Funktion annehmen kann !

x^2 ist immer niemals eine negative Zahl; im „schlimmsten" Fall ist x^2 = 0. Dann wird noch 4 addiert, d.h. der kleinste y-Wert ist $\sqrt{4}=2$

c) Zeichne die Funktion im Bereich von $-5 \leq x \leq 5$!

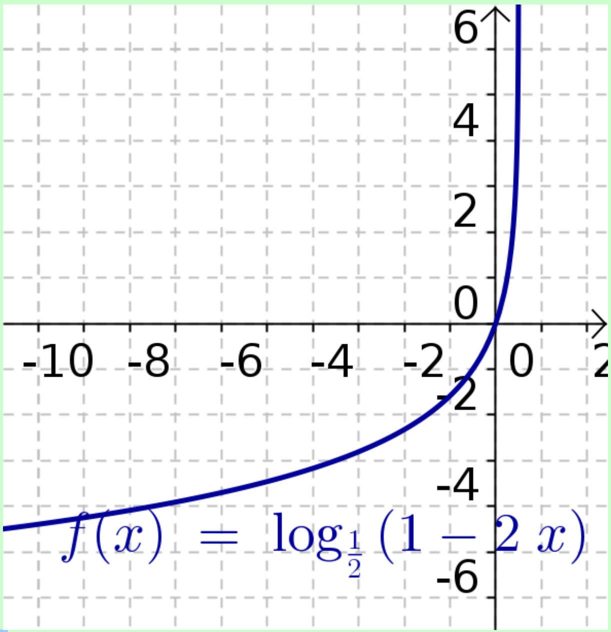


6.

a) * Bestimme rechnerisch den Definitionsbereich der nebenstehenden Funktion !

Ungleichungen werden wir Gleichungen behandelt mit einer Zusatzbedingung:

Multipliziert oder **dividiert** man mit / durch eine(r) **negativen** Zahl, muss das Ungleichheitszeichen **umgedreht** werden !



$$\begin{array}{rcll} 1-2x & > & 0 & |-1 \\ -2x & > & -1 & |:(-2) \\ x & < & \frac{1}{2} & \end{array}$$

=> $D_{max} = \{\, x \,|\, x < \frac{1}{2} \}$

b) Vergleiche dein Ergebnis mit der Zeichnung !

Stimmt

c) Welcher y-Wert ergibt sich für x_1=-1 ?

$$y_1 = f(-1) = \log_{\frac{1}{2}}(1-2\cdot(-1)) = \log_{\frac{1}{2}}(3) \approx \mathbf{-1{,}58}$$

d) Zeige, dass der Ursprung auf der Funktion liegt !

$f(0) = \log_{\frac{1}{2}}(1-2\cdot 0) = \log_{\frac{1}{2}}(1) = 0$ **=> O(0 | 0) liegt auf f !**

e) Für welchen x-Wert erhält man den y-Wert 2 ?

Lösungen: Definitionsbereich

2

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 \\
\log_{\frac{1}{2}}(1-2x) &= 2 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1-2x \\
\frac{1}{4} &= 1-2x \quad |-1 \\
-\frac{3}{4} &= -2x \quad |:(-2) \\
\mathbf{\frac{3}{8}} &= x
\end{aligned}
$$